

Des barres bleues et rouges à la droite numérique

Les barres rouges et les barres bleues et rouges, ça vous dit quelque chose ? Ce sont des barres de bois issues du matériel Montessori.

La plus grande fait 1 m, et les autres 90, 80 70...

Chez Montessori, elles sont peintes soit tout en rouge, soit en bleu et rouge.

Elles sont utilisées dès le début de la maternelle pour construire le nombre, et pour cause, elles sont très utiles. En effet, sous une apparence banale, elles font toucher du doigt aux jeunes enfants des concepts fondamentaux des mathématiques, à un moment de leur développement où ils ne peuvent pas encore les comprendre autrement.

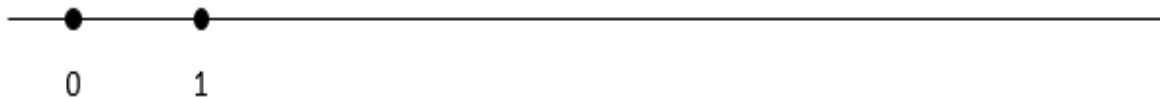
Elles permettent aux enfants de construire progressivement une représentation spatiale continue des nombres. Et l'aboutissement de cette représentation, ce sera la droite numérique.

La droite numérique

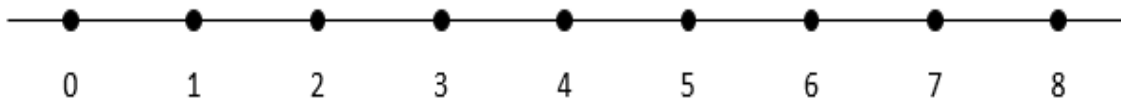
La droite numérique, ça vous dit quelque chose ?

Vous savez, c'est la droite qui représente l'ensemble des nombres réels.

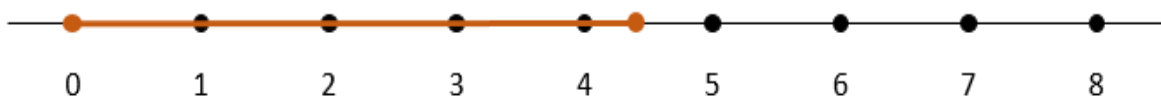
Il s'agit d'une droite, en général représentée horizontalement, sur laquelle est placé un point, appelé origine et étiqueté 0, et un autre point, dans ce qui suit à sa droite, étiqueté 1 :



On reporte sur cette droite la longueur entre le point 0 et le point 1, à partir du point 1, et on obtient les points 3, 4, 5, 6, 7, 8...

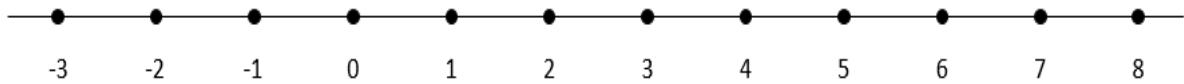


Avec cette nouvelle lecture, on peut associer chaque point de la droite numérique situé à droite de 0 à la longueur du segment le reliant à l'origine. On obtient ainsi des nombres qui ne sont pas nécessairement entiers :



Par extension, tous les segments de même longueur sont associés au même nombre. Pour le moment, nous ne nommons pas ce nombre, ni les autres nombres non entiers.

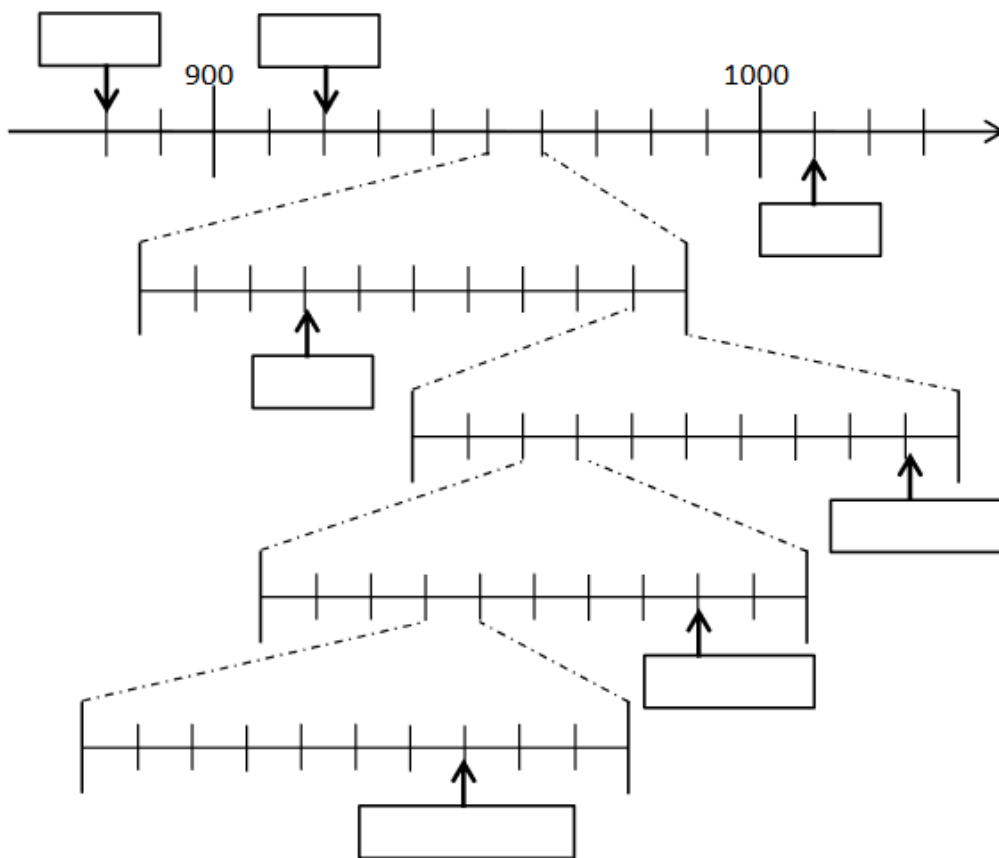
En reportant le segment unité vers la gauche, on obtient les nombres négatifs :



Cette représentation très importante n'est pas si simple à comprendre, surtout si elle n'est pas expliquée aux enfants... De fait, elle a eu du mal à émerger historiquement : Ce qui a été le plus compliqué, c'est de prouver les concepts de continuité et densité.

- La continuité signifie qu'on peut prolonger une droite, et la suite des nombres, à l'infini, des deux côtés.

- La densité signifie qu'un intervalle contient une infinité d'éléments, même s'il est borné. Il n'est donc pas possible de trouver deux réels distincts (8 et 7,999 ...) entre lesquels il n'y aurait pas de décimaux. En ce qui concerne les nombres, on peut le schématiser au C3 ainsi :



Ces propriétés difficiles à concevoir se construisent lentement, et le concept de droite, comme celui des ensembles de nombres, sont en cours d'acquisition en fin de cycle 3, et se renforcent par la suite.

Or, si la stabilisation de cette représentation est tardive, on peut commencer tôt, et surtout ne pas introduire d'obstacles à sa compréhension.

Une représentation spatiale des nombres

Cette représentation est fondamentale, mais elle ne s'installe pas naturellement. Or, elle permet de donner du sens à un vocabulaire spatial très souvent utilisé en mathématiques, mais rarement explicité : On retrouve d'ailleurs cette notion d'espace dans certaines expressions courantes de la langue française, telles que « 5 est plus près de 6 que de 9 » ou « 6 est entre 5 et 7 » ou certaines expressions enfantines comme « je sais compter très loin ».

Il s'agit de prendre conscience qu'on utilise des mots qui renvoient à une conception spatiale sans parfois les expliciter, les enseigner. Un exemple important est le rangement : Si l'on prend deux nombres différents sur cette droite numérique, le plus grand sera celui qui correspond au point situé plus à droite. De même, pour un élève qui a seulement une conception du nombre comme quantité, dire que 36 est un nombre compris entre 30 et 40 peut lui sembler hors de propos car le terme "entre" renvoie à une conception spatiale.

Des quantités continues

Alors quel est le lien avec les barres rouges et rouges et bleues ? C'est que la droite numérique et les barres font appel à un aspect des nombres finalement peu travaillé dans les petites classes : les quantités continues.

Voici la définition que l'on peut trouver dans l'Encyclopedia Universalis : "Le mot continu désigne en général ce qui est d'un seul tenant, ce qui se module avec tous les degrés intermédiaires souhaitables (ainsi les flux liquides nous semblent continus, l'espace et le temps nous paraissent devoir l'être) ; de l'autre côté, relève du discret ce qui éclate, se résout en individus isolés, ce qui est séparé d'avec soi-même, comme l'indique l'étymologie latine (ainsi les bornes kilométriques le long des routes, les mots successifs dans les phrases, ou les lettres dans les mots sont les unités d'ensembles ou de séries discrètes)." (<https://www.universalis.fr/encyclopedie/continu-et-discret/>)

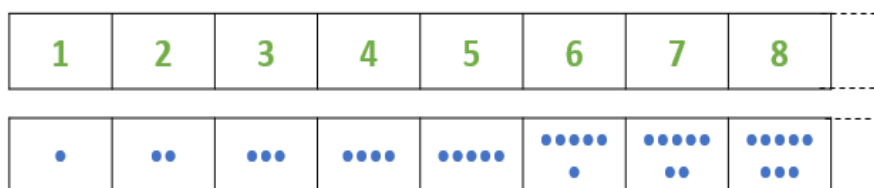
En effet, la droite numérique est une représentation continue de la suite des nombres, qui met en jeu les longueurs, comme nous venons de le voir. Et cette notion de "grandeur" ouvre une autre vision du nombre.

Pour le dire autrement, voici un extrait de l'ouvrage *Le nombre à l'école maternelle : une approche didactique*, de Claire Margolinas, Floriane Wozniak, De Boeck, 2012 :

" Si l'on compare les œufs et les coquetiers, la correspondance terme à terme permet de savoir sans aucun doute possible s'il y a bien la même quantité d'œufs et de coquetiers. Si l'on compare les longueurs de deux bâtons, il peut rester "un tout petit bout", d'ailleurs, si l'on prend une loupe pour mieux observer, voire un microscope, on constatera une différence, même petite, même infime, entre les longueurs des deux bâtons.

Du point de vue mathématiques, ce phénomène est dû au caractère continu de ces grandeurs »

L'aspect ordinal et discret de cette suite est souvent représenté dès la maternelle sur une bande numérique :



Or, cette bande, par l'aspect même des cases, représente l'aspect ordinal et discret de la suite numérique. Utilisée seule, elle peut bloquer la compréhension des quantités continues, et ensuite des nombres décimaux ou relatifs...

L'aspect continu est peu travaillé en C1 et 2, alors qu'il est fondamental, en lien avec les grandeurs. C'est ce que les barres rouges et rouges et bleues permettent de commencer à faire, en action. En effet, elles utilisent des quantités continues, en lien avec les grandeurs, et permettent une première approche de cette représentation linéaire.

Quelles activités avec les barres ?

1. Classer, trier et comparer des quantités continues : la tâche la plus connue est celle où l'enfant range les barres de la plus petite à la plus grande. Cette activité très importante au niveau des longueurs nécessite de prendre un repère d'origine...
2. On peut aussi comparer des barres issues des barres rouges et des barres rouges et bleues, et montrer qu'on ajoute une barre de longueur 1 pour passer d'une barre à la suivante.
3. On peut aussi représenter une quantité à l'aide d'une barre, et montrer l'itération de l'unité et par conséquent la conservation des distances entre deux unités, qui sera fondamentale sur la droite numérique.
4. Enfin, et c'est un travail qui est peu connu, on peut travailler l'estimation des longueurs : par exemple, demander à l'enfant de trouver la barre rouge de longueur 5 parmi ces 3 barres, en ayant la vue sur le modèle rouge et bleue, ou seulement avec le modèle de la barre de longueur 10... ou seulement avec la barre de longueur 1, ce qui change les stratégies de recherche. La barre rouge et bleue pourra alors servir de validation.

Ainsi, toutes ces manipulations, et la verbalisation de ces actions, vont permettre à ces représentations abstraites d'être vécues de façon concrète par l'enfant.

Une autre activité consiste à placer des étiquettes nombres reliées à chaque barre. Se pose alors la question du placement des étiquettes nombres : au centre du segment ou à la fin ?

Déjà sur la droite numérique, le nombre écrit peut être problématique :

En effet, un même signe désigne objets différents :

- le point (l'abscisse)
- la mesure algébrique (la distance de ce point à l'origine)
- cette même distance entre deux points distants :



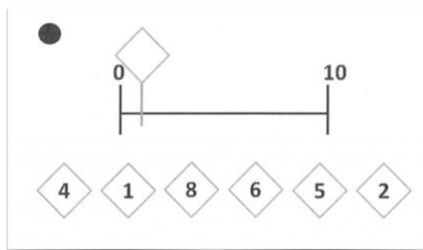
Si l'on veut utiliser les barres pour construire cette représentation des nombres, il semble donc intéressant de faire placer les étiquettes sous la fin de la barre, pour amener les élèves à ne pas considérer les barres comme une accumulation de petits bâtons de 1, ce qui renvoie à des quantités discrètes, et aux cases de la bande numériques, mais petit à petit, et sans leur dire tout de suite, en longueurs, ce qui renverra aux points de la droite numérique.

Il sera alors utile d'être vigilant sur le vocabulaire employé pour désigner les barres : « Voici la barre de longueur 3 ».

Lorsque les enfants sont bien familiers avec les barres, et à condition de donner un repère (barre de 1 ou de 10), ils peuvent tenter l'exercice avec les barres rouges, puis avec quelques barres rouges. Par exemple, la barre 10 étant donnée, on demande aux enfants de donner la longueur de ces trois barres. De nombreuses stratégies sont exploitables, et on pourra leur faire verbaliser par exemple ici, que « j'ai reconnu la 2, comme c'est ce qui manque pour la grande, c'est 8, et 4, c'est parce que c'est le milieu de 8 ». C'est donc une situation d'une très grande richesse où les enfants doivent mettre en jeu non seulement leurs compétences spatiales et leurs connaissances sur les relations entre les nombres.

Cet exercice d'estimation des longueurs vous évoque sans doute un autre exercice, issu des évaluations CP, et qui a beaucoup fait parler de lui.

S'entraîner en actes

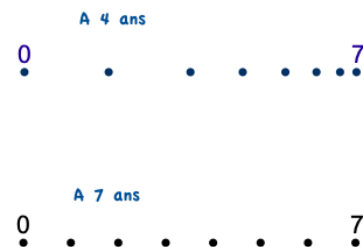


Voici donc un des items demandés en début de CP. Le travail avec les barres permet de construire des compétences qui seront très utiles pour le résoudre. Et voilà une bonne façon de préparer ce test, sans bachoter des exercices de droite numérique... Et au fait, ce test ?

Pourquoi ?

C'est un test ancien dans le domaine de la psychologie cognitive, renforcé par les apports des neurosciences : ce genre de test d'estimation sur ligne numérique est utilisé depuis longtemps par les psychologues pour accéder à la précision de la représentation mentale des quantités. Avec l'apprentissage, les enfants passent d'une représentation logarithmique, c'est-à-dire qu'ils accordent plus d'espace entre les petits nombres qu'entre les grands nombres, ils vont vouloir placer 1,2,3...

à une représentation linéaire dans laquelle le même espace est conservé entre tous les nombres. Ce passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire a souvent lieu entre 5 et 7 ans d'après différentes études.



Ce test n'est donc pas destiné à être « réussi » par les élèves, il n'est pas une évaluation finale de ce qu'ils auraient appris. Comme tous les tests psychologiques, il donne une information sur le degré de maturation de connaissance en cours de construction chez les enfants de cet âge, et c'est ainsi, à mon sens, qu'il faut le lire.

Et après les barres ?

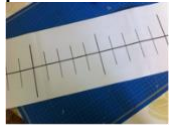
Si ce travail sur le matériel de Montessori semble très intéressant dès le cycle 1, il n'est bien sûr pas suffisant pour que les enfants construisent cette représentation linéaire des nombres. En plus, il est important qu'ils puissent changer d'échelle.



Pour changer d'échelle, on peut ensuite utiliser les règles Cuisenaire. Elles représentent également des quantités continues, mais le repère de l'unité n'est qu'externe (il s'agit de la règle représentant le 1, il n'y a pas de barres bleues et rouges comme repères). Les couleurs aident à la reconnaissance et à la mémoire perceptive des grandeurs, mais interdisent le travail d'estimation. Ce matériel permettra comme les barres rouges de travailler également le calcul.

Pour changer d'échelle mais dans l'autre sens, et utiliser le corps de l'enfant dans un espace plus grand, on peut utiliser une corde à nœuds dans le gymnase, et amener les enfants à s'y déplacer en suivant des consignes.

Le fil à linge permet ensuite une manipulation déjà plus abstraite. On peut y laisser les pinces comme sur la photo, mais aussi les enlever pour laisser aux élèves estimer leur position.



Enfin, on peut utiliser une droite graduée affichée, sans nombres, et replacer les étiquettes au bon endroit. Cette droite sera très utile aussi pour les calculs et le travail sur les longueurs.

Ces activités permettront toujours d'explicitier le vocabulaire spatial si souvent rencontré : 5 est entre 4 et 6, 3 est avant 7...

Pour conclure

Pour conclure, il y a donc de nombreuses façons d'aider les élèves à construire leur représentation spatiale des nombres. Les barres me semblent un bon point de départ. Dans la classe, dès la maternelle et l'étude des petits nombres, on pourra penser à afficher une droite numérique construite collectivement à partir des barres, en reportant ensemble et explicitement l'unité. Utiliser la ligne numérique en classe permettra aux enfants de construire leur ligne numérique mentale, qui sera un support très important de leurs apprentissages futurs. En effet, la linéarité de la représentation des quantités joue un rôle essentiel dans le développement des connaissances numériques. Des chercheurs ont montré que plus les enfants ont une représentation linéaire, meilleurs sont leurs scores à un test de mathématiques. Donc, gardons en tête que nous devons explicitement travailler cette construction spatiale avec les élèves, dès la maternelle, et encore au cycle 2, et construire avec eux des lignes numériques à chaque niveau.